

Analisis Tekuk Nonlinier (*Nonlinear Buckling*) pada Struktur Fleksibel Tinggi (*Highly Flexible Structures*)

Anwar Dolu^{a*}, Amrinsyah Nasution^b dan Agus Rivani^a

^aJurusan Teknik Sipil, Fakultas Teknik Universitas Tadulako, Palu, Indonesia.

^bJurusan Teknik Sipil, Fakultas Teknik Sipil dan Perencanaan, Institut Teknologi Bandung (ITB), Bandung, Indonesia

* Corresponding author's e-mail: anwardoluuntad@gmail.com

Received: 14 August 2026; revised: 31 August 2026 ; accepted: 4 September 2026

Abstract: Current structural engineering practice increasingly adopts slender and flexible structural systems, commonly referred to as Highly Flexible Structures (HFS). This trend stems from efforts to minimize structural dimensions and weight while improving efficiency and aerodynamic design. This study investigates the nonlinear post-buckling behavior of cantilever structures, from the onset of the first buckling mode (Euler buckling) to the post-buckling condition at maximum lateral deflection. The nonlinear formulation is based on the nonlinear moment-curvature relationship. The analytical solution for the nonlinear buckling problem is obtained by solving the governing nonlinear differential equation in terms of the first and second kinds of elliptic integrals. The computations are performed using the Computer Algebra System (CAS) Maple and the open-source software R (R-Studio). The results show that the critical load under nonlinear post-buckling conditions is greater than the Euler critical load (P_{cr}) at the onset of the first buckling. This phenomenon is defined as the post-buckling load. The critical load is obtained as $P = 4,315EI/L^2$, corresponding to a maximum lateral deflection of $\Delta x_{max} = 0,8063.L$, an axial deflection of $\delta y = 0,1947.L$, and a tip rotation angle of $\theta_0 = 113,744^\circ$. Based on the load (P)–lateral deflection (Δx) curve in the post-buckling stage, the critical load increases gradually while the lateral deflection increases significantly. After exceeding the maximum lateral deflection (Δx_{max}), the critical load increases markedly while the lateral deflection tends to decrease. In contrast, the load–axial deflection (δy) and load–tip rotation (θ_0) relationships show that both axial deflection and tip rotation increase proportionally with the applied load. These findings are applicable to structures made of Steel, Copper, and Aluminum subjected to axial compressive loading, within the range from the Euler buckling load to the post-buckling load, prior to reaching the maximum lateral deflection (Δx_{max}) and within the elastic limit of the material.

Keywords: *highly flexible structure (HFS), Euler buckling, nonlinear buckling, elliptic integral, post-buckling*

Abstrak: Rekayasa konstruksi saat ini, banyak menerapkan jenis struktur yang ramping dan fleksibel yang dikenal sebagai struktur sangat fleksibel (HFS), sebagai konsekuensi dari upaya meminimalkan dimensi dan bobot struktur serta meningkatkan efisiensi dan desain aerodinamis. Dalam penelitian ini, bertujuan meninjau tekuk nonlinier pasca tekuk (post buckling) pada struktur kantilever setelah terjadi tekuk pertama (Tekuk Euler) hingga kondisi pasca tekuk (post-buckling) saat terjadi lendutan lateral maksimum. Pendekatan nonlinier yang ditinjau adalah berdasarkan hubungan momen kelengkungan nonlinier. Solusi analitis untuk kasus tekuk nonlinier diperoleh dengan penyelesaian persamaan diferensial nonlinier dalam bentuk penyelesaian integral eliptik jenis pertama dan kedua, dengan menggunakan aplikasi perangkat lunak Sistem Aljabar Komputer (CAS) Maple dan software open source R (R-studio). Hasil analisis pada kondisi tekuk nonlinier adalah besaran beban kritis yang diperoleh lebih besar dari beban kritis Euler (P_{cr}) saat tekuk pertama terjadi, fenomena ini disebut beban pasca-tekuk (*post-buckling*). Beban kritis sebesar $P = 4,315EI/L^2$, pada saat lendutan lateral maksimum $\Delta x_{max} = 0,8063.L$, Lendutan Aksial $\delta y = 0,1947.L$, dan putaran sudut di ujung $\theta_0 = 113,744^\circ$. Berdasarkan kurva hubungan beban (P) dan lendutan lateral (Δx) saat pasca tekuk (*post-buckling*), perilaku beban kritis meningkat dengan landai dan besar lendutan meningkat signifikan. Setelah melewati lendutan lateral maksimum (Δx_{max}), beban kritis mengalami peningkatan signifikan dan lendutan lateral cenderung menurun. Sedangkan hubungan beban dan lendutan arah aksial (δy) dan sudut ujung bebas (θ_0), lendutan dan putaran sudut cenderung meningkat secara proporsional seiring peningkatan beban. Untuk terapan konstruksi pada bahan Baja, Tembaga dan Aluminium, yang menerima beban aksial tekan, dimulai saat beban tekuk Euler tercapai hingga beban pasca tekuk (post buckling) pada kondisi sebelum terjadi lendutan lateral maksimum (Δx_{max}) dan batasan pada perilaku elastis material.

Kata kunci: *struktur sangat fleksibel (HFS), tekuk Euler, tekuk nonlinier, integral eliptik, pasca-tekuk*

1. Pendahuluan

Dalam rekayasa struktur modern, aplikasi struktur fleksibel tinggi (*highly flexible structures*, HFS) digunakan untuk meminimalkan atau memaksimalkan dimensi struktur, mengurangi berat struktur, meningkatkan efisiensi, serta desain yang lebih langsing [1]. Struktur-struktur ini dirancang untuk mengalami perpindahan besar, rotasi, dan/atau tekuk tanpa mengalami deformasi plastis pada kondisi operasi normal. Struktur fleksibel tinggi (HFS) digunakan di sistem mekanis, struktur sipil, struktur sayap

pesawat terbang, struktur lepas pantai, perangkat medis, peralatan olahraga [2–5]. Dengan perilaku perpindahan dan rotasi besar tersebut, terdapat berbagai tantangan dalam pemodelan, analisis, dan pengujian struktur fleksibel tinggi di bidang mekanika komputasi dan rekayasa struktur [6–7]. Pada kajian ini digunakan metode analitik untuk penyelesaian Persamaan Diferensial Tekuk Nonlinier dalam bentuk penyelesaian Integral eliptik [8–9]. Penelitian ini untuk mengetahui perilaku tekuk pada rentang tekuk pertama terjadi (tekuk Euler), hingga terjadi kondisi pasca

tekuk (post-buckling) saat terjadi lendutan lateral maksimum (Δx_{max}).

2. Metode Penelitian

2.1. Perumusan Persamaan Diferensial

Perpindahan dan gaya-gaya dalam pada struktur kantilever yang menerima beban P di ujung bebasnya, berdasarkan hubungan momen-kelengkungan nonlinier seperti pada Gambar 1 [10–12].

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{M}{EI} \quad (1)$$

dengan:

θ = putaran sudut ;

s = panjang busur

M = momen lentur sepanjang busur s

E = modulus elastisitas bahan

I = momen inersia penampang

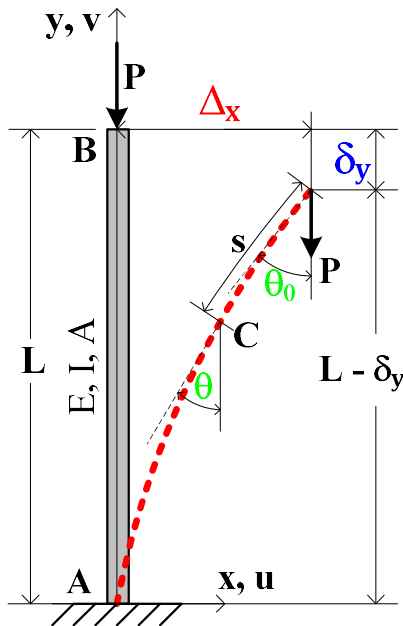
Diferensial terhadap panjang busur (s) dari Persamaan (1)

$$EI \frac{d^2\theta}{ds^2} = \frac{dM}{ds} \quad (2)$$

Momen lentur $M(s)$ terhadap titik C, sesuai Gambar (1):

$$M(s) = Px \quad (3)$$

P = Beban titik pada ujung kantilever. Untuk dx/ds , dy/ds sesuai Gambar (1) diketahui:



Gambar 1. Geometri perpindahan nonlinier pada struktur kantilever

$$\frac{dx}{ds} = \sin \theta \quad (4)$$

$$\frac{dy}{ds} = \cos \theta \quad (5)$$

Sesuai dengan Persamaan (2 – 5), diperoleh:

$$EI \frac{d^2\theta}{ds^2} + P \sin \theta = 0 \quad (6)$$

Untuk notasi P/EI

$$k^2 = \frac{P}{EI} \rightarrow P = k^2 EI \quad (7)$$

dengan mengalikan Persamaan (6) dengan $d\theta/ds$ dan di lakukan integral:

$$\frac{1}{2} \int \frac{d}{ds} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 ds + k^2 \int \sin \theta d\theta = 0 \quad (8)$$

Integrasi Persamaan (8)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = k^2 \cos \theta + C \quad (9)$$

Kondisi batas pada ujung bebas di titik B

$$\theta(0) = \theta_0 ; \quad \left(\frac{d\theta}{ds} \right)_{s=0} = 0 \quad (10)$$

Dari persamaan (9) dan (10) dapat diperoleh konstanta C

$$C = -k^2 \cos \theta_0 \quad (11)$$

Substitusi C dari Persamaan (11) ke Persamaan (9):

$$\left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = 2k^2 (\cos \theta - \cos \theta_0) = 0 \quad (12)$$

Dari Persamaan (12), diperoleh ds , untuk panjang total L dengan integrasi ds sebagai fungsi sudut θ :

$$\begin{aligned} L &= \int ds = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{k\sqrt{2}(\cos \theta - \cos \theta_0)} \\ &= \frac{1}{2k} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\frac{\theta_0}{2}) - \sin^2(\frac{\theta}{2})}} \end{aligned} \quad (13)$$

Dengan mengambil notasi

$$\begin{aligned} \rho &= \sin \left(\frac{\theta_0}{2} \right); \quad \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) = \rho \sin \phi = \\ &\sin \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \sin \phi \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\theta = \frac{2\rho \cos \phi d\phi}{\cos(\frac{\theta}{2})} = \frac{2\rho \cos \phi d\phi}{\sqrt{1-\rho^2 \sin^2 \phi}} \quad (14b)$$

$$= \rho \cos \phi = \sqrt{\sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)} \quad (14c)$$

2.2. Perhitungan Perpindahan dan Rasio Beban Kritis

Substitusi Persamaan (14) ke Persamaan (13), maka panjang total (L) dapat diselesaikan dalam bentuk integral eliptik.

$$L = \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(1-\rho^2 \sin^2 \phi)}} = \frac{1}{k} K(\rho) \quad (15)$$

Lendutan arah x berdasarkan Persamaan (4) and (13), maka diperoleh persamaan berikut:

$$dx = \sin \theta ds = \frac{\sin \theta d}{k\sqrt{2}(\cos \theta - \cos \theta_0)} \quad (16a)$$

$$dx = \frac{1}{2k} \int_0^{\theta_0} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\sin^2(\frac{\theta_0}{2}) - \sin^2(\frac{\theta}{2})}} \quad (16b)$$

Dalam bentuk sederhana untuk lendutan maksimum arah x sesuai Persamaan (15) dan Persamaan (16),

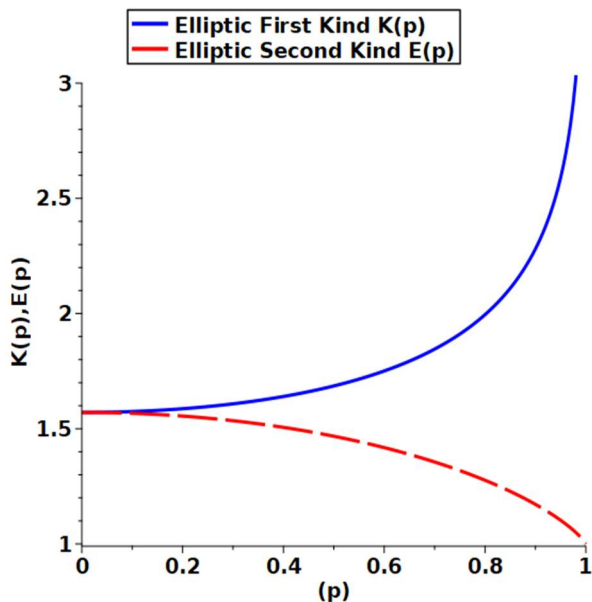
$$\Delta_x = \frac{2\rho}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = \frac{2\rho}{k} = \frac{2\rho}{K(\rho)} L \quad (17a)$$

$$k = \frac{K(\rho)}{L} \quad (17b)$$

Dan lendutan arah y sesuai Persamaan (5) dan Persamaan (13)

$$\delta_y = \frac{2}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \theta} d\theta - L = \left[2 \frac{E(\rho)}{K(\rho)} - 1 \right] L \quad (18)$$

Untuk $K(\rho)$ dan $E(\rho)$ masing-masing adalah fungsi integral eliptik lengkap jenis pertama (*first kind*) dan jenis kedua (*second kind*) [8–9,13–14]. Nilai-nilai fungsi eliptik tersebut dapat diperoleh menggunakan Software Maple CAS [15] dan Software R (R-studio) [16]



Gambar 2. Fungsi integral eliptik pertama dan integral eliptik kedua

fungsi eliptik dalam Software Maple [15]

> EllipticK(ρ); # integral eliptik lengkap jenis pertama
> EllipticE(ρ); # integral eliptik lengkap jenis kedua

fungsi eliptik dalam Software R (Rstudio) [16]

ellint_1(k) # integral eliptik lengkap jenis pertama
ellint_2(k) # integral eliptik lengkap jenis kedua

Untuk grafik fungsi eliptik seperti pada Gambar 2. Dengan menentukan nilai putaran sudut pada ujung bebas (θ_0), kemudian substitusi ke Persamaan (17) dan

Persamaan (18), maka dapat diperoleh lendutan arah x (Δ_x), lendutan arah y (δ_y), dan rasio beban kritis P/P_{cr} sesuai Tabel (1), Gambar 3 dan Gambar 4. Untuk beban kritis Euler (P_{cr}) pada struktur balok kantilever berdasarkan teori lendutan kecil sesuai model linier [6–7, 10–12]

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (19)$$

Sebagai verifikasi nilai yang diperoleh seperti dalam Tabel (1) dan grafik (4), sama dengan hasil dari Timoshenko [6], untuk nilai sudut diujung $\theta_0 = 60^\circ$, diperoleh lendutan $\Delta_x/L = 0.741$; $\delta_y/L = 0.593$ dan nilai $P/P_{cr} = 1.152$. Dengan beban yang bekerja semakin meningkat, maka dapat dihitung Lendutan maksimum sesuai Gambar (3), besarnya dapat diperoleh dengan menggunakan Persamaan (17), dengan minimasi Δ_x terhadap besaran (ρ) yaitu $d\Delta_x/d\rho = 0$:

$$\frac{d\Delta_x}{d\rho} = \frac{2}{K(\rho)} - \frac{2 \left[\frac{E(\rho)}{(1-\rho^2)} - K(\rho) \right]}{K^2(\rho)} = 0 \quad (20)$$

Penyelesaian persamaan non linier (20) diperoleh nilai (ρ)

$$\rho \cong 0.83745 \quad (21)$$

Pada saat lendutan maksimum terjadi di arah x, dapat dihitung sudut kritis θ_0 , dan beban kritis non linier P_{NL} . Dengan substitusi nilai (ρ) dari Persamaan (21) ke Persamaan (14), maka dapat dihitung sudut kritis θ_0 ,

$$\theta_0 = 113.744^\circ \quad (22)$$

dan substitusi nilai (ρ) dari Persamaan (21) ke Persamaan (7) dan (17), maka diperoleh beban kritis non linier P :

$$P = 4.315 \frac{EI}{L^2} \quad (23)$$

Berdasarkan nilai beban kritis non linier (P) pada saat lendutan maksimum sesuai Persamaan (23), dibandingkan terhadap beban kritis Euler P/P_{cr}

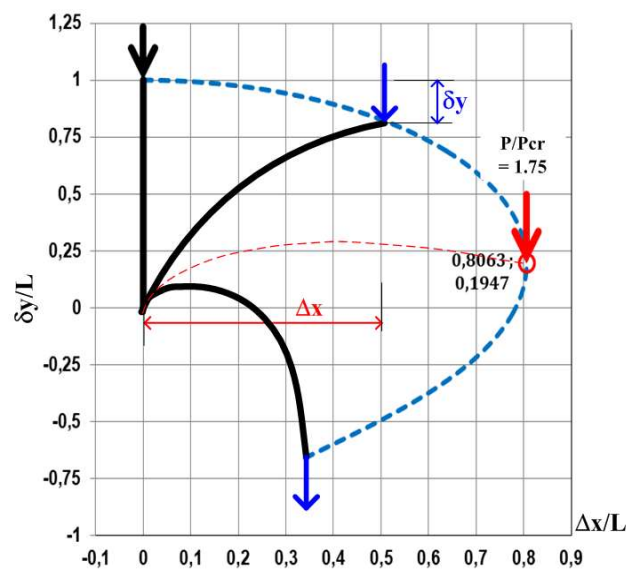
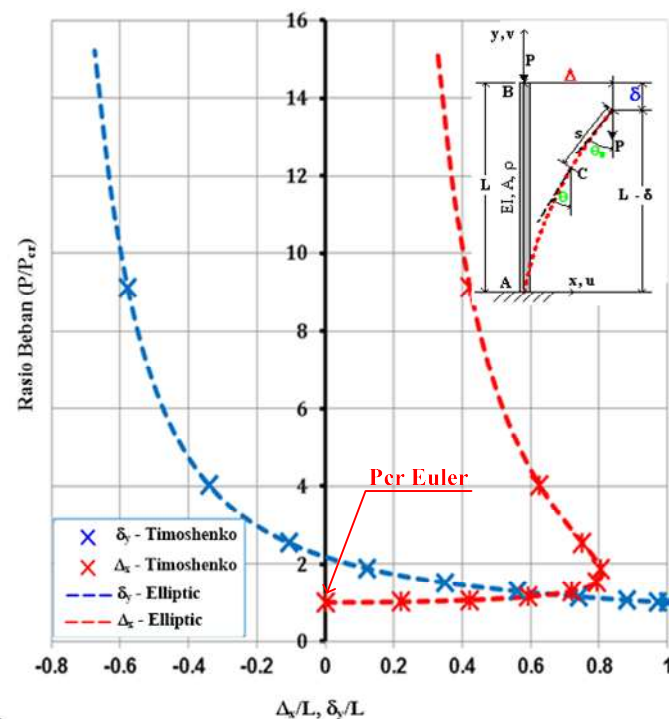
$$\frac{P}{P_{cr}} = 1.7489 \quad (24)$$

Dengan substitusi nilai (ρ) dari Persamaan (21), lendutan maksimum arah x (Δ_x) dapat diperoleh berdasarkan Persamaan (17) dan lendutan arah y (δ_y) sesuai Persamaan (18). Trayektori lendutan seperti pada Gambar 3 dan Gambar 4:

$$\frac{\Delta_{x_{max}}}{L} = 0.8063 \quad ; \quad \frac{\delta_y}{L} = 0.1947 \quad (25)$$

Tabel 1. Rasio Beban Kritis dan Rasio Lendutan (x dan y) untuk setiap Putaran Sudut

θ_0	P/P _{cr}	$\delta y/L$	$\Delta x/L$	θ_0	P/P _{cr}	$\delta y/L$	$\Delta x/L$
0	1	1,000	0,000	100	1,518	0,349	0,792
10	1,004	0,992	0,111	110	1,678	0,237	0,805
20	1,015	0,970	0,219	120	1,885	0,123	0,803
30	1,035	0,932	0,324	130	2,160	0,008	0,785
40	1,064	0,881	0,422	140	2,542	-0,107	0,750
50	1,102	0,817	0,513	150	3,105	-0,222	0,698
60	1,152	0,741	0,593	160	4,030	-0,340	0,625
70	1,215	0,655	0,663	170	5,950	-0,471	0,520
80	1,294	0,559	0,719	175	8,281	-0,556	0,442
90	1,393	0,457	0,763	179	15,218	-0,674	0,326

**Gambar 3.** Trajektori Lendutan Arah x dan y**Gambar 4.** Rasio Beban Kritis dan Lendutan arah x dan y

3. Batasan Analisis Elastik

Dalam analisis lendutan besar, berdasarkan momen lentur yang diperoleh, terdapat batasan pada perilaku elastis material [18 – 20]

$$M_{\max} \leq M_y = EI\kappa_y \quad (26)$$

Kelengkungan leleh κ_y , pada penampang persegi panjang:

$$\kappa_y = \frac{2\sigma_y}{Eh} \quad (27)$$

Rasio Panjang L dan tebal / tinggi (h)

$$\frac{L}{h} \geq \frac{1}{2} \kappa_y L \left(\frac{E}{\sigma_y} \right) \quad (28)$$

4. Analisis dan Pembahasan

Dalam analisis tekuk nonlinier, dapat diperoleh perilaku pasca tekuk (*post buckling*) yang dapat memberikan gambaran kondisi struktur saat menahan beban tambahan setelah tekuk awal terjadi pada kondisi Tekuk Euler (Pcr). Untuk struktur fleksibel tinggi (*HFS*) dan bahan baja atau aluminium dengan tebal sangat kecil (tipis), kita tidak langsung menganggap struktur gagal saat tekuk awal (Tekuk Euler) terjadi, akan tetapi struktur punya kekuatan hingga pasca tekuk (*post-buckling*) yang secara aplikatif bisa dimanfaatkan. Ini membuat desain jadi lebih efisien dan ringan. Perilaku tekuk nonlinier, dimulai saat terjadi beban tekuk Euler (Pcr), selanjutnya saat beban terus bertambah, maka rasio beban kritis (P/Pcr) juga meningkat walaupun dengan kurva landai hingga terjadi lendutan maksimum dalam arah x dan y sebesar $\Delta x_{\max}/L = 0.8063$, $\delta y/L = 0.1947$. Rasio beban kritis meningkat signifikan setelah melewati lendutan maksimum tersebut.

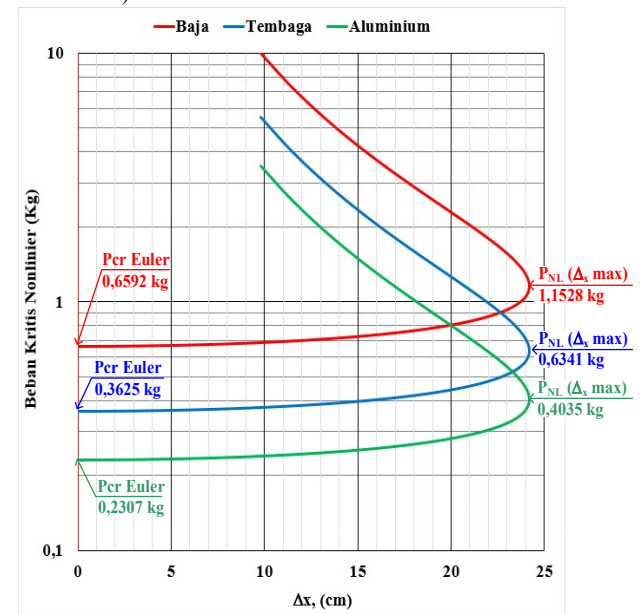
Contoh kasus untuk nilai putaran sudut pada ujung bebas $\theta_0 = 70^\circ$, maka $\rho = \sin(7\pi/36)$, nilai integral eliptik $K(\rho) \approx 1.7312$. Sesuai Persamaan (7) dan Persamaan (17), maka diperoleh nilai $P = 2.9972 EI/L^2$. Untuk beban kritis Euler (Pcr) sesuai Persamaan (19), maka nilai $P/P_{cr} = 1.2147$ (Tabel 1), berdasarkan hasil tersebut diperoleh beban kritis nonlinier lebih besar 21.47 % dari beban tekuk Euler, saat tekuk pertama terjadi.

Tabel 2. Beban kritis Euler dan beban kritis pasca tekuk (*post buckling*) saat lendutan maksimum

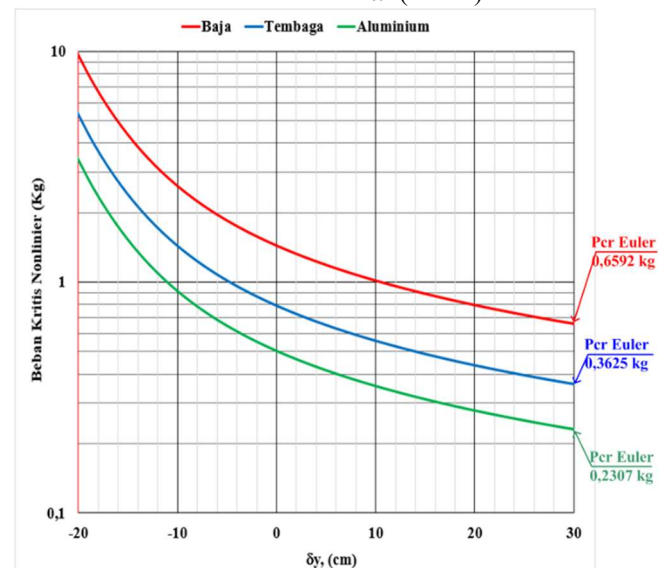
Parameter	Bahan		
	Baja	Tembaga	Aluminium
Mod. Elastisitas (Kg/cm ²)	2.000.000	1.100.000	700.000
Pcr Euler (Kg)	0,6592	0,3625	0,2307
Lendutan Max Δx (cm)	24,189		
Sudut Kondisi Max θ ₀ (°)	113,744°		
Pcr Nonlinier (Kg) (saat Δx max)	1,1528	0,6341	0,4035

Selanjutnya saat terjadi lendutan maksimum dengan putaran sudut $\theta_0 = 113.744^\circ$, maka nilai $P/P_{cr} = 1.7489$. Setelah terjadi lendutan maksimum tersebut rasio beban

kritis (P/Pcr) meningkat sangat signifikan (Tabel 1 dan Gambar 4).



Gambar 5. beban tekuk nonlinier dan lendutan lateral Δx (arah x)

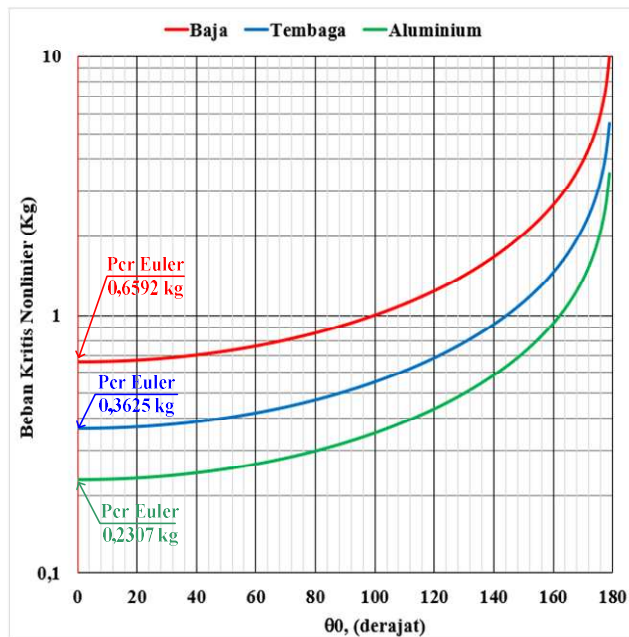


Gambar 6. Beban tekuk nonlinier dan lendutan lateral δy (arah y)

Sesuai Belendez [17], untuk aplikasi bahan baja diketahui Modulus Elastisitas (E) = 200 GPa, dengan panjang bentang $L = 30$ cm, lebar $b = 3.04$ cm dan tebal (tinggi) $h = 0.078$ cm, diperoleh nilai Momen Inersia $I = bh^3/12 = 1.20 \times 10^{-4} \text{ cm}^4$ [18]. Dalam analisis ini juga ditinjau bahan Tembaga untuk Modulus Elastisitas (E) = 110 GPa, dan Aluminium $E = 70$ GPa, untuk dimensi yang sama seperti bahan baja. Besar beban tekuk Euler sesuai Persamaan (19) untuk bahan Baja $P_{cr} = 0,6592 \text{ kg}$. Hubungan Beban Kritis Nonlinier dan lendutan arah x dan y sesuai Gambar 4 dan Gambar 5. Nilai lendutan maksimum arah x dan arah y dihitung sesuai Persamaan (25), maka nilai $\Delta x_{\max} \approx 24.189 \text{ cm}$ dan nilai $\delta y \approx 5.841 \text{ cm}$. Untuk perbandingan beban kritis Euler (Pcr) dan Beban Kritis

Nonlinier pada bahan Baja, Tembaga dan Aluminium sesuai Tabel 2.

Berdasarkan Tabel 2 dan pada Gambar (5), terlihat bahwa pada beban kecil, perilaku tekuk yang berlaku dalam ranah tekuk Euler (Pcr). Dengan tiga bahan berbeda yaitu Baja, Tembaga dan Aluminium untuk dimensi penampang dan panjang yang sama, besar beban tekuk Euler dan beban tekuk nonlinier juga dipengaruhi oleh modulus elastisitas bahan (E).



Gambar 7. Beban tekuk nonlinier dan putaran sudut ujung kantilever (θ_0)

Gambar 5 memberikan gambaran rentang aplikasi konstruksi pada bahan Baja, Tembaga dan Aluminium, yang dimulai saat beban tekuk Euler tercapai hingga beban pasca tekuk (*post buckling*) pada kondisi sebelum terjadi lendutan maksimum ($\Delta x_{\max}$) dan batasan pada perilaku elastis material, sesuai rasio modulus elastisitas Bahan (E) dan tegangan Leleh Bahan (σ_y) dan rasio panjang bentang dan tinggi penampang L/h sesuai Persamaan (28).

Dengan mengamati lendutan lateral arah x (Δx) terjadi batas lendutan pada kondisi lendutan maksimum ($\Delta x_{\max}$) dan lendutan lateral cenderung menurun dengan bertambahnya beban, sedangkan pada lendutan arah y (δ_y) (Gambar 6) dan putaran sudut ujung (θ_0) (Gambar 7) cenderung meningkat proporsional dengan bertambahnya beban.

5. Kesimpulan

Analisis struktur fleksibel tinggi (*highly flexible structure*), untuk beban tekuk nonlinier, memberikan gambaran kondisi struktur yang dapat menahan beban tambahan setelah tekuk awal terjadi pada kondisi Tekuk Euler (Pcr), perilaku ini disebut perilaku pasca tekuk (*post buckling*).

Berdasarkan kurva hubungan beban dan lendutan lateral (arah x) saat tahap pasca tekuk (*post-buckling*), perilaku beban kritis meningkat dengan landai dan lendutan meningkat signifikan, setelah melewati batas lendutan maksimum ($\Delta x_{\max}$) terjadi peningkatan signifikan pada beban tekuk dan lendutan arah lateral berkurang. Untuk Hubungan kurva beban (P) dan lendutan pada arah aksial (δ_y), lendutannya cenderung meningkat secara proporsional seiring peningkatan beban. Begitu pula pada hubungan beban dan putaran sudut ujung (θ_0) juga meningkat secara proporsional seiring peningkatan beban.

Lendutan aksial maksimum terjadi pada saat beban kritis $P = 4.315 EI/L^2$, atau rasio beban kritis mencapai $P/P_{cr} = 1.7489$, dengan besar lendutan lateral (arah x) $\Delta x_{\max} = 0.8063 \times L$ dan besaran lendutan aksial (arah y) $\delta_y = 0.1947 \times L$ dan sudut ujung $\theta_0 = 113.744^\circ$.

Untuk terapan konstruksi pada bahan Baja, Tembaga dan Aluminium, untuk kasus beban aksial tekan, yang dimulai saat beban tekuk Euler tercapai hingga beban pasca tekuk (*post buckling*) pada kondisi sebelum terjadi lendutan maksimum ($\Delta x_{\max}$) dan batasan pada perilaku elastis material, sesuai rasio modulus elastisitas Bahan (E) dan tegangan Leleh Bahan (σ_y) serta rasio panjang bentang dan tinggi penampang L/h .

Daftar Pustaka

- [1] P.F. Pai, *Highly Flexible Structures: Modeling, Computation, and Experimentation*, Reston, VA, USA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2007.
- [2] A. Ohtsuki, "Analysis of the Characteristics of Fishing Rods Based on the Large-Deformation Theory," *Materials and Science in Sports*, pp. 161–170, 2001.
- [3] A.B. Sotiropoulou and D.E. Panayotounakos, "Exact Parametric Analytic Solutions of the Elastica ODEs for Bars Including Effects of the Transverse Deformation," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 39, pp. 1555–1570, 2004 <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2003.09.004>.
- [4] A. Abolfathi, M.J. Brennan, and T.P. Waters, "Large Deflection of a Simply Supported Beam," *ISVR Technical Memorandum*, no. 988, Institute of Sound and Vibration Research, University of Southampton, Southampton, UK, 2010.
- [5] A. Khavvaji, M.H. Pashaei, M. Dardel, and R.A. Alashti, "Large Deflection Analysis of Compliant Beams of Variable Thickness and Non-Homogenous Material under Combined Load and Multiple Boundary Conditions," *IJE Transactions C: Aspects*, vol. 25, no. 4, pp. 353–362, 2012.
- [6] S.P. Timoshenko and J.M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., New York, USA: McGraw-Hill Book Company, 1961.

- [7] P. Villaggio, *Mathematical Models for Elastic Structures*, Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1997
<https://doi.org/10.1017/CBO9780511529665>.
- [8] I.S. Sokolnikoff and R.M. Redheffer, *Mathematics of Physics and Modern Engineering*, 2nd ed., New York, USA: McGraw-Hill Book Company, 1966.
- [9] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 10th printing, Washington, DC, USA: U.S. Government Printing Office, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 55, 1972.
- [10] N.G.R. Iyengar, *Structural Stability of Columns and Plates*, Chichester, UK: Ellis Horwood Limited, 1988.
- [11] M. Sathiyamoorthy, *Nonlinear Analysis of Structures*, Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 1998.
- [12] D.G. Fertis, *Nonlinear Mechanics*, Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 1999.
- [13] G.M. Scarpello and D. Ritelli, "Elliptic Integral Solutions of Spatial Elastica of a Thin Straight Rod Bent Under Concentrated Terminal Forces," *Meccanica*, vol. 41, no. 5, pp. 519–527, 2006
<https://doi.org/10.1007/s11012-006-9000-3>.
- [14] A. Zhang and G. Chen, "A Comprehensive Elliptic Integral Solution to the Large Deflection Problems of Thin Beams in Compliant Mechanisms," *Journal of Mechanisms and Robotics*, vol. 5, no. 2, 021006, 2013
<https://doi.org/10.1115/1.4023558>.
- [15] A. Heck, *Introduction to Maple*, 3rd ed., New York, USA: Springer Science+Business Media, 2003, 828 pp. <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0023-6>.
- [16] R Core Team, *The R v4.6.1 Manuals*, 2026.
<https://rstudio.github.io/r-manuals/>, accessed June 19, 2026.
- [17] T. Beléndez, C. Neipp, and A. Beléndez, "Large and Small Deflections of a Cantilever Beam," *European Journal of Physics*, vol. 23, no. 3, pp. 371–379, 2002
<https://doi.org/10.1088/0143-0807/23/3/317>.
- [18] W.C. Young and R.G. Budynas, *Roark's Formulas for Stress and Strain*, 7th ed., New York, USA: McGraw-Hill Companies, Inc., 2002.
- [19] T.X. Yu and W. Johnson, "The Plastica: The Large Elastic-Plastic Deflection of a Strut," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 17, no. 3, pp. 195–209, 1982
[https://doi.org/10.1016/0020-7462\(82\)90019-1](https://doi.org/10.1016/0020-7462(82)90019-1).
- [20] W.J. Stronge and T.X. Yu, *Dynamic Models for Structural Plasticity*, London, UK: Springer-Verlag, 1995. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0397-4>.

This page is intentionally left blank