

Analisis Perpindahan Besar Akibat Gaya Non-Konservatif

A. Dolu^{a*}, A. Nasution^b, A. Rivani^a dan G.M. Oka^a

^aJurusan Teknik Sipil, Fakultas Teknik Universitas Tadulako, Palu, Indonesia, 94112

^bJurusan Teknik Sipil dan Perencanaan, Institut Teknologi Bandung, Bandung, Indonesia, 40132

* Corresponding author's e-mail: anwardolu1972@gmail.com

Received: 22 December 2021; revised: 6 February 2022; accepted: 10 February 2022

Abstract: Structural applications based on large displacement analysis are widespread in various fields, such as the application of aircraft structures, membranes, cables, pipelines and risers. In this study, the author reviews the structural responses based on large displacement theory and non-conservative load models, assuming linear sections and materials. The parameters reviewed are the variation of the load factor and the variation of the slope angle of the load P at the end of the span. Solving non-linear differential equations with non-conservative force, using numerical integration method. The simulation results with the variation of the load factor with the angle of inclination, vertical and horizontal displacements are obtained, where the final orientation of the acting force corresponds to the deformation of the structure, and the maximum deformation occurs at a load angle of 90°, the deformation decreases for the angle orientation is getting smaller.

Keywords: large displacement, non linear, conservative, non – conservative, numeric integration, deformation

Abstrak: Terapan struktur berdasarkan analisis perpindahan besar meluas di berbagai bidang, seperti aplikasi struktur pesawat, membran, kabel, sistem perpipaan (*pipelines*) dan *riser*. Dalam kajian ini, Penulis meninjau tanggap struktur (*structural responses*) berdasarkan teori perpindahan besar dan model beban Non-Konservatif, dengan asumsi penampang dan bahan linier. Simulasi parameter yang ditinjau adalah variasi faktor beban dan variasi sudut kemiringan beban P diujung bentang. Penyelesaian persamaan diferensial non-linier dengan gaya non-konservatif, menggunakan metode integrasi numerik. Hasil simulasi dengan dengan variasi faktor beban dengan sudut kemiringan, yang diperoleh perpindahan vertikal dan horizontal, dimana orientasi akhir dari gaya yang bekerja sesuai dengan deformasi struktur tersebut, dan deformasi maksimum terjadi pada sudut beban 90°, deformasi semakin berkurang untuk orientasi sudut semakin mengecil.

Kata kunci : perpindahan besar, non linier, konservatif, non – konservatif, integrasi numerik, deformasi

1. Pendahuluan

Secara umum gaya-gaya yang diterapkan ke struktur diklasifikasikan menjadi dua bagian yaitu 1). Gaya konservatif (*conservative load*) dan 2). Gaya non-konservatif (*nonconservative load*). Gaya konservatif jika kerja yang dilakukan oleh gaya hanya bergantung posisi awal dan akhir, tidak tergantung pada jalur lintasannya seperti gaya elastik, gaya gravitasi, gaya elektrostatik, gaya apung. Sedangkan gaya non-konservatif jika kerja yang dilakukan oleh gaya tergantung pada jalur lintasannya, atau orientasi gaya yang bekerja bergantung pada deformasi struktur [1-4]. Sumber gaya non-konservatif dapat terjadi akibat gaya aerodinamik, gaya hidrodinamik, gaya propulsi roket, gaya gesek dan gaya elektromagnetik [3]. Beberapa penyelesaian kasus gaya non-konservatif, antara lain penyelesaian perpindahan besar pada tumpuan jepit bebas akibat beban titik P (non-konservatif) menggunakan integral elliptic [2]. Kasus lendutan besar pada tumpuan jepit – bebas akibat beban titik ditinjau yang bekerja pada dua titik yang berbeda dan kemiringan beban juga berbeda. Masalah tersebut diselesaikan dengan metode iterasi [5]. Lendutan besar akibat beban titik P pada tumpuan jepit – bebas dengan model lurus dan model kurva setengah lingkaran, dengan Penyelesaian persamaan diferensial nonlinier menggunakan metode Runge-Kutta [6]. Kasus lendutan besar pada tumpuan jepit – bebas, yang ditinjau

untuk beban titik P dengan variasi sudut (α), untuk penyelesaian persamaan diferensial yang digunakan adalah metode homotopi perturbasi (*homotopy perturbation method*) dengan kombinasi pendekatan Laplace-Pade [7].

2. Persamaan Diferensial Non Linier

Perumusan persamaan diferensial berdasarkan Hubungan Momen – Kelengkungan (*moment – curvature relation*) non linier dapat dituliskan dalam bentuk [8-10].

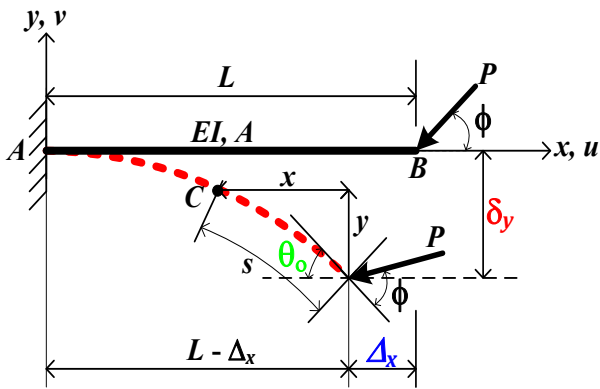
$$M(s) = E \left[I(s) \frac{d\theta}{ds} \right] \quad (1)$$

Untuk notasi:

$M(s)$ = Momen lentur sepanjang busur s
 s = Panjang busur
 E = Modulus Elastisitas Bahan
 $I(s)$ = Momen inersia penampang
 θ = Putaran sudut

Momen lentur $M(s)$ pada titik C (Gambar. 1) diberikan:

$$\begin{aligned} M(s) &= P_y x(s) + P_x y(s) \\ &= P \sin(\phi - \theta_0) x(s) + P \cos(\phi - \theta_0) y(s) \end{aligned} \quad (2)$$



Gambar 1. Geometri perpindahan nonlinier, akibat beban Titik (P) Tipe Non-konservatif

Untuk notasi:

P = Beban titik

ϕ = Sudut beban titik P

Diketahui $dx/ds, dy/ds$ dari Gambar 1 diperoleh

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta \tag{3a}$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \theta \tag{3a}$$

Turunan pertama momen lentur (M_s) terhadap panjang busur (s) dari Persamaan (1) dan Persamaan (2–3a,3b)

$$\begin{aligned} \frac{dM(s)}{ds} &= P \sin(\phi - \theta_0) \cos \theta + P \cos(\phi - \theta_0) \sin \theta \\ &= P \sin(\theta + \phi - \theta_0) \end{aligned} \tag{4}$$

Dari Persamaan (1), dan menurunkannya terhadap Panjang busur kecil ds

$$(EI) \frac{d^2\theta}{ds^2} = \frac{dM(s)}{ds} \tag{5}$$

Sesuai Persamaan (4) dan Persamaan (5), maka diperoleh bentuk persamaan diferensial non-linier berikut [11–15]:

$$EI \frac{d^2\theta}{ds^2} + P \sin(\theta + \phi - \theta_0) = 0 \tag{6}$$

Dari Persamaan (6), untuk notasi non – dimensional

$$\varphi = \frac{s}{L} ; \alpha = \frac{PL^2}{EI} \tag{7}$$

Untuk notasi:

L = Panjang bentang

EI = Kekakuan penampang (asumsi konstan)

α = Faktor beban

Sesuai Persamaan (7), maka Persamaan (6) menjadi

$$\frac{d^2\theta}{d\varphi^2} + \alpha \sin(\theta(\varphi) + \phi - \theta_0) = 0 \tag{8}$$

Kondisi batas Persamaan 8 tersebut

$$\varphi = 1, \theta(1) = 0 ; \varphi = 0, \theta'(0) = 0 \tag{9}$$

Sesuai [7], variabel $\theta(\varphi)$ dari Persamaan (8) ditransformasi menjadi persamaan berikut

$$\lambda(\varphi) = \theta(\varphi) + \phi - \theta_0 \tag{10}$$

Dari Persamaan (10), maka Persamaan (8) menjadi masalah kondisi nilai awal (*Initial Value Problem, IVP*)

$$\frac{d^2\lambda}{d\varphi^2} + \alpha \sin(\lambda) = 0 \tag{11}$$

Kondisi batas

$$\varphi = 0, \lambda(0) = \phi ; \varphi = 1, \lambda'(1) = 0 \tag{11}$$

Dengan penyelesaian Persamaan (11–12), maka diperoleh

$$\theta(\varphi) = \lambda(\varphi) - \lambda(1) \tag{13}$$

Sesuai Persamaan (8), ditransformasi menjadi dua persamaan diferensial nonlinier orde pertama

$$\frac{d\theta(\varphi)}{d\varphi} = \sigma(\varphi) \tag{14}$$

$$\frac{d\sigma(\varphi)}{d\varphi} = -\alpha \sin(\theta(\varphi) + \phi - \theta_0) \tag{15}$$

Kondisi batas

$$\varphi = 0, \theta(0) = \theta_0 ; \varphi = 1, \sigma(1) = 0 \tag{16}$$

Untuk koordinat perpindahan dalam bentuk non dimensional

$$\xi = \frac{x}{L} \tag{17a}$$

$$\eta = \frac{y}{L} \tag{17b}$$

Sesuai persamaan (3) dan Persamaan (17) maka diperoleh

$$\frac{d\xi(\varphi)}{d\varphi} = -\cos \theta ; \tag{18}$$

$$\frac{d\eta(\varphi)}{d\varphi} = \sin \theta \tag{19}$$

Kondisi batas

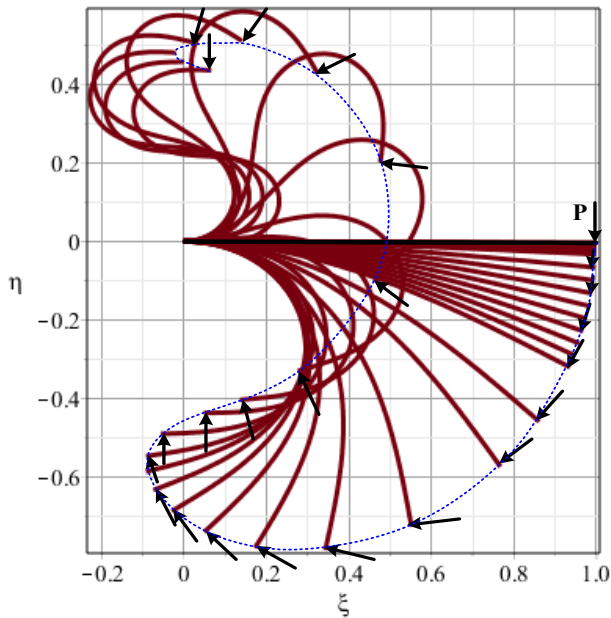
$$\varphi = 1, \xi(1) = 0 ; \varphi = 1, \eta(1) = 0 \tag{20}$$

Dengan menyelesaikan Persamaan (11–20), dengan variasi faktor beban ($\alpha = PL^2/EI$) dan kemiringan beban P (ϕ), maka diperoleh tanggap (*responses*) beban-perpindahan sesuai Tabel 1, hubungan Beban Perpindahan ($P-\Delta$) sesuai Gambar 2, Gambar 3 dan trajektori perpindahan sesuai Gambar 4

3. Hasil dan Pembahasan

Berdasarkan hasil analisis, dengan nilai-nilai numerik faktor beban ($\alpha = 0,01 \dots 50,0$) dan variasi kemiringan sudut ($\phi = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$), maka diperoleh perpindahan

horizontal (Δx) dan perpindahan vertikal (δy). Pada Gambar 2, tinjauan khusus deformasi untuk kemiringan sudut beban titik P ($\phi = 90^\circ$), dengan variasi faktor beban ($\alpha = 0,01 \dots 50,0$) sesuai Tabel 1. Secara geometri, hubungan beban dan perpindahan sesuai Gambar 2, terlihat bahwa orientasi gaya yang bekerja tersebut bergantung pada deformasi struktur yang terjadi.



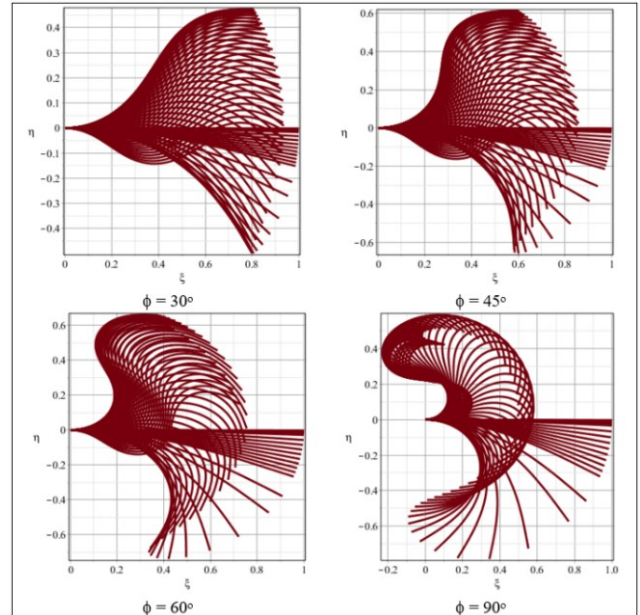
Gambar 2. Konfigurasi Perpindahan Horizontal (Δx) dan Vertikal (δy), Sudut Beban P ($\phi=90^\circ$)

Tabel 1. Lendutan dan Putaran Sudut akibat Beban Titik P Non-konservatif dengan Variasi Faktor Beban (α)

$\alpha = PL^2/EI$	$(1-\Delta x)/L$	$\delta y/L$	θ (rad)
0,01	0,99999	-0,00333	0,00500
0,03	0,99994	-0,01000	0,01500
0,05	0,99983	-0,01667	0,02500
0,07	0,99967	-0,02333	0,03500
0,10	0,99933	-0,03332	0,05000
0,30	0,99402	-0,09965	0,14989
0,50	0,98348	-0,16504	0,24948
0,70	0,96790	-0,22891	0,34858
1,00	0,93565	-0,32064	0,49588
2,00	0,76736	-0,57384	0,96824
3,00	0,55166	-0,72669	1,39866
4,00	0,34275	-0,78617	1,77644
5,00	0,17228	-0,78069	2,09816
6,00	0,04950	-0,74027	2,36555
7,00	-0,02959	-0,68695	2,58315
8,00	-0,07386	-0,63359	2,75655
9,00	-0,09227	-0,58629	2,89138
10,00	-0,09212	-0,54698	2,99272
20,00	0,27571	-0,33016	2,85058
30,00	0,47614	0,20169	1,69086
40,00	0,14061	0,51045	0,58902
50,00	-0,02024	0,48034	0,05958

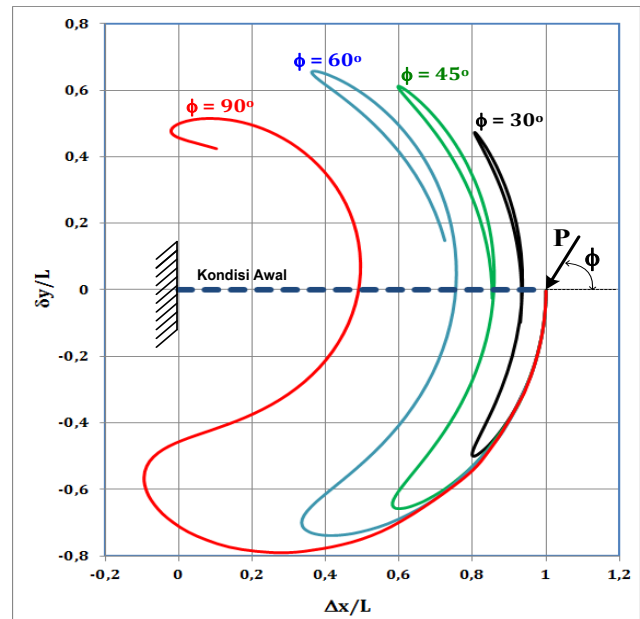
Pada Gambar 3, untuk konfigurasi perpindahan horizontal (Δx) dan perpindahan vertikal (δy) dengan

variasi faktor beban ($\alpha = PL^2/EI$) dan variasi kemiringan sudut beban P ($\phi = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$), dimana hubungan antara beban dan perpindahan terlihat bahwa orientasi gaya P (sudut beban ϕ) yang bekerja bergantung pada deformasi struktur yang terjadi atau bersifat non-konservatif.



Gambar 3. Konfigurasi perpindahan horizontal (Δx) dan vertikal (δy), dengan variasi sudut beban (ϕ)

Gaya non-konservatif dengan variasi faktor beban (α) dan sudut beban titik P (ϕ), seperti pada Gambar 4, terlihat bahwa trajektori perpindahan maksimum terjadi pada sudut beban titik P ($\phi = 90^\circ$), dan perpindahan maksimum semakin berkurang dengan orientasi sudut beban titik P semakin mengecil ($\phi = 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$).



Gambar 4. Trajektori perpindahan ($\Delta x/L, \delta y/L$), variasi faktor beban dan sudut beban (α, ϕ) non-konservatif

4. Kesimpulan

Tipe gaya non-konservatif yang diterapkan pada struktur, maka kerja yang dilakukan oleh gaya tergantung pada jalur lintasannya (trajektori perpindahannya). Dari hasil analisis menunjukkan bahwa orientasi gaya yang bekerja bergantung pada deformasi struktur yang terjadi, diperoleh pula bahwa deformasi maksimum terjadi pada kondisi dengan orientasi sudut beban P sebesar $\phi = 90^\circ$, dan deformasi berkurang untuk orientasi sudut beban titik P semakin mengecil yaitu sudut $\phi = 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$.

Daftar Pustaka

- [1] V.V. Bolotin, *Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability*, New York: Pergamon Press Inc., 1963.
- [2] P. Villagio, *Mathematical Models for Elastic Structures*, Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [3] C.A. Felippa, *Nonlinear Finite Element Methods*, Colorado: Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Space Structures and Controls University of Colorado Boulder, 2004.
- [4] J.F. Doyle, *Guided Explorations of the Mechanics of Solids and Structures*, Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- [5] B.S. Shvartsman, "Large Deflections of a Cantilever Beam Subjected to a Follower Force", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 304, no. 3-5, p. 969, 2007.
- [6] A.K. Nallathambi, C.L. Rao, and S.M. Srinivasan, "Large Deflection of Constant Curvature Cantilever Beam Under Follower Load", *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 52, no. 3, p. 440, 2010.
- [7] H. Vázquez-Leal, Y. Khan, A.L. Herrera-May, U. Filobello-Nino, A. Sarmiento-Reyes, J.M. Jiménez-Fernández, D. Pereyra-Díaz, A. Perez-Sesma, R. Castaneda-Sheissa, A. Díaz-Sanchez, and J. Huerta-Chua, "Approximations for Large Deflection of a Cantilever Beam under a Terminal Follower Force and Nonlinear Pendulum", *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2013, p. 1, 2013.
- [8] S. Timoshenko, *History of Strength of Materials with a Brief Account of the History of Theory of Elasticity and Theory of Structures*, New York: Dover Publications Inc., 1983.
- [9] M. Sathymoorthy, *Nonlinear Analysis of Structures*, Florida: CRC Press LLC., 1998.
- [10] D.G. Fertis, *Nonlinear Structural Engineering*, Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [11] A. Hasegawa, T. Matsuno, and F. Nishino, "Elastic Instability and Nonlinear Analysis of Thin-Walled Cross-Section Members Subject to Non-conservative Forces", *J-STAGE*, vol. 1988, no. 392, 1988.
- [12] A.M. Gasparini, A.V. Saetta, and R.V. Vitaliani, "On the Stability and Instability Regions of Non-Conservative Continuous System Under Partially Follower Forces", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 124, no. 1-2, p. 63, 1995.
- [13] T.N. Todorov, B. Cunningham, D. Dundas, and A.P. Horsfield, "Non-Conservative Forces in Bulk Systems", *Materials Science and Technology*, vol. no. 12, p. 1442, 1997.
- [14] Q.L. Li, S. R. Li, and C. S. Xiang, "Nonlinear Analysis of a Cantilever Elastic Beam under Non-conservative Distributed Load," *Proc. Fourth International Conference on Information and Computing*, vol. 2011, p. 181, 2011.
- [15] R.S. Barsoum, "Finite Element Method Applied to the Problem of Stability of A Non-Conservative System", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 3, no. 1, p. 63, 1971.